

1.9. Equivalencia entre expresiones regulares y autómatas

Teorema. Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje. El lenguaje L es regular si y sólo si existe una expresión regular R sobre Σ tal que $\mathcal{L}(R) = L$.

1.10. Autómatas finitos generalizados

Definición (Autómata finito generalizado). Un *autómata finito generalizado (AFG)* es una 5-tupla $G = (Q, \Sigma, \delta, s, t)$, donde Q es finito, s es el único estado inicial, t es el único estado final y $\delta: (Q \setminus \{t\}) \times (Q \setminus \{s\}) \rightarrow \text{ER}(\Sigma)$ asigna una expresión regular a cada posible transición.

El AFG acepta $w \in \Sigma^*$ si existen estados $r_0 = s, r_1, \dots, r_m = t$ y una factorización $w = x_1 \cdots x_m$ con $x_i \in \Sigma^*$ tal que

$$x_i \in \mathcal{L}(\delta(r_{i-1}, r_i)) \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Definición (Eliminación de un estado). Sea $r \notin \{s, t\}$ un estado de un AFG y escriba $R_{ij} = \delta(i, j)$. Al eliminar r , para cada $i, j \neq r$ reemplazamos la etiqueta de i a j por

$$R'_{ij} = R_{ij} \mid R_{ir}(R_{rr})^*R_{rj}.$$

Teorema. Sea G un AFG y sea $r \notin \{s, t\}$ un estado. Sea G' el AFG obtenido al eliminar r . Entonces $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$.

1.11. Tres perspectivas de los lenguajes regulares

Lenguajes regulares. Un lenguaje es regular exactamente cuando puede describirse mediante **AFD**, **AFND** o **ER**. Las conversiones fundamentales son

- AFD $\rightarrow$ AFND: construcción de subconjuntos.
- AFND $\rightarrow$ ER: eliminación de estados en un AFG equivalente.
- ER $\rightarrow$ AFND: construcciones recursivas para unión, concatenación y estrella.

Ejercicios

1. Considere el AFND sin transiciones ε con estados q_0, q_1, q_2, q_3 , estado inicial q_0 , estados finales q_2, q_3 y tabla de transición

	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$

- Describa informalmente el lenguaje aceptado por el autómata.
 - Entregue una ER equivalente usando la construcción de eliminación de estados. ¿Puede simplificar la expresión obtenida?
 - A partir de su expresión regular, construya un AFND equivalente usando las construcciones recursivas para unión, concatenación y estrella.
 - Construya también un AFD equivalente.
 - Elimine los estados en otro orden: ¿Cuál es la expresión regular obtenida? ¿Es equivalente a la anterior?
2. Sean Σ y Γ alfabetos. Un *homomorfismo de strings* se especifica dando, para cada símbolo $a \in \Sigma$, una palabra $h(a) \in \Gamma^*$. Extendemos h a todos los strings de Σ^* por $h(\varepsilon) = \varepsilon$ y $h(xa) = h(x)h(a)$ para todo $x \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$. Para lenguajes $L \subseteq \Sigma^*$ y $K \subseteq \Gamma^*$, definimos

$$h(L) = \{h(w) : w \in L\}, \quad h^{-1}(K) = \{w \in \Sigma^* : h(w) \in K\}.$$

- Considere $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{a, b\}$ y $f: \Sigma \rightarrow \Gamma$ definido por $f(0) = ab$ y $f(1) = b$. Calcule $f(0101)$ y $f(1^30^2)$ y describa $f(\{0, 1\}^*)$ y $f^{-1}(\{ab\}^*)$.
 - Sea A un AFD que reconoce un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ y sea h un homomorfismo de strings. Construya un AFG que reconozca $h(L)$. Argumente que su construcción es correcta.
 - Sea R una expresión regular sobre Σ . Construya (de manera recursiva) una expresión regular sobre Γ que reconozca $h(\mathcal{L}(R))$. Argumente que su construcción es correcta.
 - Concluya de b) o de c) que la imagen homomorfa de un lenguaje regular también es regular.
 - Sea $K \subseteq \Gamma^*$ reconocido por un AFD B y sea $h: \Sigma \rightarrow \Gamma$ un homomorfismo de strings. Construya un AFD que reconozca $h^{-1}(K)$. Argumente que su construcción es correcta y que el preimagen homomorfa de un lenguaje regular también es regular.
- Indicación: cuando su automata lea un símbolo $a \in \Sigma$ ¿Qué debería simular en B ?*
3. Sea $L \subseteq \{a\}^*$ y defina $S_L = \{n \in \mathbb{N} : a^n \in L\}$. Diremos que $S \subseteq \mathbb{N}$ es *eventualmente periódico* si existen enteros $N \geq 0$ y $p \geq 1$ tales que

$$n \in S \iff n + p \in S \quad \text{para todo } n \geq N.$$

- Sea $M = (Q, \{a\}, \delta, q_0, F)$ un AFD con m estados. Sea $\{r_i\}_{i=0}^m$ la secuencia de estados que se visitan al leer una cadena de a 's, es decir, $r_0 = q_0$ y $r_{i+1} = \delta(r_i, a)$. Muestre que existen $i < j \leq m$ tales que $r_i = r_j$.

- b) Deduzca que, si L es regular, entonces S_L es eventualmente periódico.
- c) Suponga ahora que S_L es eventualmente periódico con umbral N y período p . Construya una expresión regular para L usando A , B , N y p .
- d) Concluya que $L \subseteq \{a\}^*$ es regular si y sólo si S_L es eventualmente periódico.
- e) Entregue una expresión regular y un AFD para

$$L_0 = \{a, a^3\} \cup \{a^n : n \geq 5 \text{ y } n \equiv 2 \text{ o } 5 \pmod{6}\}.$$

Señale un umbral y un período válidos. ¿Son únicos?