

1.12. Lema de bombeo

Teorema (Lema de bombeo). Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular. Existe un entero $p \geq 1$, llamado *largo de bombeo*, tal que todo string $w \in L$ con $|w| \geq p$ puede escribirse como $w = xyz$ con $x, y, z \in \Sigma^*$ de modo que

1. $|xy| \leq p$;
2. $|y| \geq 1$; y
3. $xy^iz \in L$ para todo $i \geq 0$.

Ejercicios

1. a) Demuestre que $L_1 = \{0^m 1^n 0^m : m, n \geq 0\}$ no es regular.
 b) Demuestre que $L_2 = \{0^i 1^j : i, j \geq 0\}$ no es regular.
 c) Demuestre que $L_3 = \{1^q : q \text{ es primo}\}$ no es regular.
 d) ¿Es el siguiente lenguaje regular? $L_4 = \{1^{2^n} : n \geq 0\}$.
 e) ¿Es el siguiente lenguaje regular?

$$L_5 = \{w \in \{0, 1\}^* : |w|_{001} + |w|_{101} = |w|_{010} + |w|_{011}\}.$$

Acá $|w|_u$ denota la cantidad de apariciones de u como substring de w .

2. a) Demuestre que el lenguaje $\{w \in \{b, c\}^* : |w|_b \geq 5|w|_c\}$ no es regular.
 b) Sea $K \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje y $a \notin \Sigma$ Definimos su *escape* como

$$\text{esc}(K) = \Sigma^* \cup \{a\}^+ K.$$

Muestre que un lenguaje es regular si y sólo si su escape es regular.

- c) Muestre que el escape de un lenguaje (regular o no) cumple el lema de bombeo. ¿Qué nos dice esto sobre la recíproca del lema de bombeo?
- d) Muestre que el lenguaje

$$\{a^m w \in \{b, c\}^* : m(|w|_b - 5|w|_c) \geq 0\}$$

satisface el lema de bombeo pero no es regular.

3. Existen varias variantes del lema de bombeo. En esta pregunta consideraremos el *lema de bombeo localizado*.

Teorema. Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular. Existe un entero $p \geq 1$ tal que todo string $w \in L$ con $w = ust$ con $u, s, t \in \Sigma^*$ y $|s| \geq p$ tiene una descomposición de $s = xyz$ con $x, y, z \in \Sigma^*$ de modo que

- a) $|xy| \leq p$;
- b) $|y| \geq 1$; y
- c) $uxy^i zt \in L$ para todo $i \geq 0$.

- a) ¿Por qué se llama lema de bombeo localizado? Compare con el lema de bombeo.
- b) Muestre que el lema de bombeo localizado implica el lema de bombeo.
- c) Muestre el lema de bombeo localizado.
- d) Muestre que el lenguaje

$$L = \{a^i b^j c^k : i \neq 2 \text{ o } j = k\}.$$

satisface el lema de bombeo.

- e) Muestre L no es regular usando el lema de bombeo localizado.