

2.1. Gramáticas libres de contexto

Definición (Gramática libre de contexto). Una *gramática libre de contexto (GLC)* es una 4-tupla $G = (V, \Sigma, R, S)$, donde V es un conjunto finito de variables, Σ es un alfabeto finito disjunto de V , $S \in V$ es la variable inicial y $R \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ es un conjunto finito de reglas. Escribimos una regla $(A, w) \in R$ como $A \rightarrow w$ y usaremos el símbolo $|$ para agrupar reglas con el mismo lado izquierdo.

Definición (Derivaciones). Sea $G = (V, \Sigma, R, S)$ una GLC. Si $A \rightarrow w$ es una regla, entonces diremos que uAv *construye* uwv y escribimos $uAv \Rightarrow uwv$ para todos $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$. Diremos que u *deriva* v y escribimos $u \Rightarrow^* v$ si existen $u_1, \dots, u_n \in (V \cup \Sigma)^*$ tales que

$$u = u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_n = v.$$

El lenguaje generado por G es

$$\mathcal{L}(G) = \{w \in \Sigma^* : S \Rightarrow^* w\}.$$

Un lenguaje es *libre de contexto* si es generado por alguna GLC.

2.2. Relación con los lenguajes regulares

Teorema. Todo lenguaje regular es libre de contexto. Además, existen lenguajes libres de contexto que no son regulares.

2.3. Propiedades de cerradura

Teorema. Sean $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ lenguajes libres de contexto. Entonces $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ y L_1^* son libres de contexto.

Ejercicios

1. a) Considere la gramática

$$S \rightarrow aSb \mid C, \quad C \rightarrow cC \mid d.$$

Entregue una derivación de $aaacccdbbb$. Describa $\mathcal{L}(G)$.

- b) Diseñe una GLC para

$$L_1 = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \text{ y } (i = j \text{ o } j = k)\}.$$

- c) Diseñe una GLC para

$$L_2 = \{a^i b^j c^{i+j} : i, j \geq 0\}.$$

d) Sea

$$R = (ab^* \mid ba^*)^*.$$

Diseñe directamente una GLC para $\mathcal{L}(R)$.

2. Sea $\Sigma = \{0, 1\}$. El objetivo de esta pregunta es tratar de obtener una versión relajada

a) Construya una GLC para los siguientes lenguajes:

$$E = \{x\#y : |x| = |y|\}.$$

$$N = \{x\#y : |x| \neq |y|\}.$$

b) Construya una GLC para

$$W = \{x\#y : x \neq y\}.$$

Indicación: Note que si $|x| = |y|$, entonces $x \neq y$ si y sólo si existe i tal que $x_i \neq y_i$.

c) Suponga que R es una relación binaria sobre Σ . La extendemos a una relación binaria sobre Σ^* de la siguiente manera:

$$x_1x_2 \cdots x_n R y_1y_2 \cdots y_n \iff x_i R y_i \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Demuestre que el lenguaje

$$\text{Bad}(R) = \{x\#y : x, y \in L \text{ y } x \not R y\}$$

es libre de contexto.

d) Muestre que si L es un lenguaje libre de contexto, entonces

$$\text{Exists}(L, R) = \{x : \exists y \in L : x R y\}$$

es libre de contexto.

3. Una gramática libre de contexto $G = (V, \Sigma, R, S)$ se dice *lineal por la derecha* si R contiene únicamente reglas de la forma $A \rightarrow wB$ o $A \rightarrow w$, donde $A, B \in V$ y $w \in \Sigma^*$.

a) Demuestre que si G es lineal por la derecha, entonces $\mathcal{L}(G)$ es regular.

b) Demuestre que si L es regular, entonces existe una GLC lineal por la derecha G tal que $\mathcal{L}(G) = L$. Demuestre, además, que se puede suponer que sus reglas son únicamente de la forma $A \rightarrow aB$ o $A \rightarrow \varepsilon$, donde $a \in \Sigma$.

c) Sea $G = (V, \Sigma, R, S)$ una gramática como en el ítem anterior, y sea $H = (V', \Sigma, R', S')$ una GLC arbitraria.

Construya reglas para una GLC G' con variables de la forma $[P, A, Q]$, con $A \in V'$ y $P, Q \in V$, de modo que, para todo $A \in V'$, $P, Q \in V$ y $w \in \Sigma^*$,

$$[P, A, Q] \xRightarrow{*}_{G'} w \iff A \xRightarrow{*}_H w \text{ y } P \xRightarrow{*}_G wQ.$$

d) Concluya que si L es libre de contexto y K es regular, entonces $L \cap K$ es libre de contexto.