

2.4. Autómatas de pila

Definición. Un *autómata de pila (AP)* es una 6-tupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, donde

- Q es un conjunto finito de *estados*;
- Σ es un conjunto finito llamado *alfabeto de entrada*;
- Γ es un conjunto finito llamado *alfabeto de pila*;
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^{Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\})}$ es la *función de transición*;
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*; y
- $F \subseteq Q$ es el *conjunto de estados de aceptación o finales*.

Definición. Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ un AP y sea $w \in \Sigma^*$ un string. Diremos que M *acepta* w si podemos escribir $w = x_1 x_2 \cdots x_m$, $x_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, y existen estados $r_0, \dots, r_m \in Q$ y strings $s_0, \dots, s_m \in \Gamma^*$ tales que

- $r_0 = q_0$ y $s_0 = \varepsilon$;
- para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, existen $a, b \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ y $t \in \Gamma^*$ tales que $(r_i, b) \in \delta(r_{i-1}, x_i, a)$, $s_{i-1} = ta$ y $s_i = tb$;
- $r_m \in F$.

Observación. Hay distintas nociones de aceptación para los autómatas de pila. La anterior es una elección común, pero también se puede definir la aceptación por vaciado de pila, o por vaciado de pila y estado final. Es decir, reemplazando la condición $r_m \in F$ por $s_m = \varepsilon$, o por $r_m \in F$ y $s_m = \varepsilon$.

Teorema. Sea $L \subseteq \Sigma^*$. El lenguaje L es libre de contexto si y sólo si existe un AP M tal que $\mathcal{L}(M) = L$.

Ejercicios

1. a) Diseñe un AP para $\{a^{3n}b^n : n \geq 0\}$.
 b) Diseñe un AP para $\{w\#x : w^r \text{ es un substring de } x \text{ con } x, w \in \{0, 1\}^*\}$.
 c) Diseñe un AP para $\{w \in \{0, 1\}^* : \text{el largo de } w \text{ es impar y el símbolo del medio es } 0\}$.
 d) La *clausura rotacional* de un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ es

$$\text{RCL}(L) = \{yx \in \Sigma^* \mid xy \in L\}.$$

Describa un AP para $\text{RCL}(L)$, dado un AP para L .

2. Una *expresión postfija* sobre las constantes a, b , los operadores binarios $+, *$ y el operador unario $!$ se define recursivamente por las reglas siguientes:

- a y b son expresiones postfijas;
- si u es una expresión postfija, entonces $u!$ también lo es;
- si u y v son expresiones postfijas, entonces $uv+$ y $uv*$ también lo son.

Sea P el lenguaje de todas las expresiones postfijas.

- a) Diseñe una GLC que genere P .
- b) Diseñe un AP que acepte P .
- c) Sea $R = \{w : w \text{ contiene una cantidad par de símbolos } ! \text{ y al menos un símbolo } +\}$. Diseñe un AFD que acepte R .
- d) Use sus diseños anteriores para construir un AP que acepte $P \cap R$.
Indicación: Piense en correr ambos autómatas en paralelo.
- e) Inspirándose en el inciso anterior. Muestre que si L es libre de contexto y R es regular, entonces $L \cap R$ es libre de contexto.
- f) ¿Es verdad la siguiente versión recíproca? Si $L \cap R$ es libre de contexto para todo lenguaje regular R , ¿es L libre de contexto?

3. En esta pregunta veremos como afectan modificaciones a la definición de autómata de pila a la clase de lenguajes que aceptan.

- a) Diremos que un AP es *k-acotado* si intuitivamente la pila nunca contiene más de k símbolos. Formalmente, un AP $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ es *k-acotado* si para todo $w \in \Sigma^*$ y toda secuencia de estados y strings de pila $r_0, \dots, r_m \in Q$ y $s_0, \dots, s_m \in \Gamma^*$ que cumpla las condiciones de aceptación, se tiene que $|s_i| \leq k$ para todo $i = 0, \dots, m$.
Muestre que los AP *k-acotados* son equivalentes a los AFD.
- b) Diremos que un AP tiene *acceso por bloques* a la pila si permite transiciones de la forma

$$p \xrightarrow{a, u \rightarrow v} q, \quad u, v \in \Gamma^*,$$

es decir que puede leer un string u de la pila y reemplazarlo por un string v en una sola transición.

Muestre que los AP con acceso por bloques son equivalentes a los AP tradicionales.

- c) Un AP tendrá *pila binaria* si su alfabeto de pila es $\Gamma = \{0, 1\}$.

Muestre que los AP con pila binaria son equivalentes a los AP tradicionales.