

2.9. Equivalencia entre AP y GLC

Teorema. Sea $L \subseteq \Sigma^*$. El lenguaje L es libre de contexto si y sólo si existe un AP M tal que $\mathcal{L}(M) = L$.

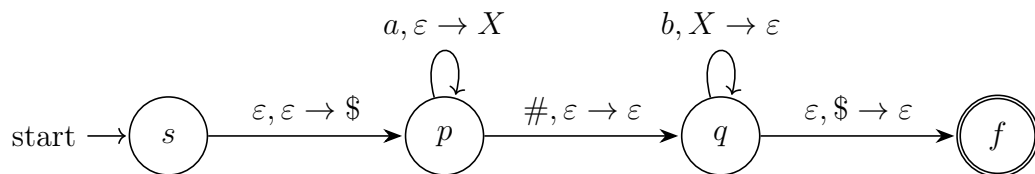
Ejercicios

1. a) Considere la gramática G dada por

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0S11 \mid T, \\ T &\rightarrow 1T \mid \varepsilon. \end{aligned}$$

Describa $\mathcal{L}(G)$.

- b) Construya un AP equivalente siguiendo la construcción $\text{GLC} \rightarrow \text{AP}$.
c) Considere el siguiente AP dado por su diagrama de estados.



Describa su lenguaje.

- d) Aplique la construcción $\text{AP} \rightarrow \text{GLC}$ al autómata anterior. Simplifique la gramática obtenida.
e) Diseñe directamente una GLC y un AP para

$$\{x\#x^Rz : x, z \in \{0, 1\}^*\}.$$

2. a) Sea $C = \{x\#x^R : x \in \{0, 1\}^*\}$. Construya una GLC con 3 reglas y 1 variable que genere C .
b) Convierta su GLC anterior en un AP equivalente.
c) Para lenguajes L definimos

$$\text{PREF}(L) = \{x : xy \in L \text{ para algún } y\}.$$

- d) Diseñe un AP que acepte $\text{PREF}(C)$.
e) Sea L un lenguaje libre de contexto y R un lenguaje regular. Muestre que existe una GLC que genera el siguiente lenguaje

$$L/R = \{x : xy \in L \text{ para algún } y \in R\}.$$

Indicación: inspirese en su construcción del inciso anterior.

- f) Use lo anterior para mostrar que $\text{PREF}(L)$ es libre de contexto para todo lenguaje libre de contexto L .

3. En esta pregunta exploraremos las *gramáticas controladas*. En una gramática controlada, cada regla recibe una etiqueta de un alfabeto finito Λ . Escribiremos $A \xrightarrow{\lambda} B$ para indicar que la regla $A \rightarrow B$ tiene la etiqueta λ .

Una derivación será *por la izquierda* si en cada paso se aplica la regla más a la izquierda posible. Una derivación será *controlada por R* si la secuencia de etiquetas de las reglas aplicadas pertenece a un lenguaje regular $R \subseteq \Lambda^*$.

Una gramática controlada es un par (G, R) donde G es una gramática y R un lenguaje regular sobre el alfabeto de etiquetas de las reglas de G . Diremos que (G, R) genera una palabra w si existe una derivación por la izquierda de w controlada por R .

- a) Considere la gramática controlada (G, R) dada por

$$S \xrightarrow{\alpha} aSb,$$

$$S \xrightarrow{\beta} T,$$

$$T \xrightarrow{\gamma} cT,$$

$$T \xrightarrow{\delta} dT,$$

$$T \xrightarrow{\eta} \varepsilon.$$

y el lenguaje regular $R = \alpha^*\beta(\gamma\delta)^*\eta$. Describa el lenguaje generado por (G, R) y de una GLC equivalente.

- b) Dada una gramática controlada (G, R) , construya un AP equivalente.

Indicación: use el autómata finito que reconoce R e inspírese en la construcción $AP \rightarrow GLC$.

- c) Muestre que un lenguaje es generado por una gramática controlada si y sólo si es libre de contexto.
- d) Suponga ahora que R no es regular, sino un lenguaje arbitrario. Muestre que **todo** lenguaje es generado por una gramática controlada (G, R) con R libre de contexto.