

2.15. Lenguajes no libres de contexto

Lema. Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto. Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

1. $|vxy| \leq p$,
2. $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
3. $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

Teorema. Si $L \subseteq \Sigma^*$ es libre de contexto y $R \subseteq \Sigma^*$ es regular, entonces $L \cap R$ es libre de contexto.

Teorema. Los LLC no son cerrados bajo intersección ni complemento.

Observación. Satisfacer bombeo es necesario para ser LLC, pero no es suficiente.

Ejercicios

1. a) Demuestre mediante bombeo que

$$\{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0, i > j \text{ e } i > k\}$$

no es libre de contexto.

- b) Demuestre mediante bombeo que $\{1^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ no es libre de contexto. ¿Qué dice el lema de bombeo en el caso de lenguajes unarios?
- c) Clasifique $\{0^m 1^n 0^m : m, n \geq 0\}$ como regular, LLC no regular o no LLC. Justifique.
- d) Clasifique de la misma manera

$$\{w \in \{0, 1\}^* : |w|_{001} + |w|_{110} = |w|_{011} + |w|_{100}\},$$

donde $|w|_u$ denota la cantidad de apariciones de u en w , contando también las apariciones superpuestas.

- e) Clasifique de la misma manera

$$\{0^m 1^n 0^m 1^n : m, n \geq 1\}.$$

Justifique.

2. Para $L \subseteq \Sigma^*$ y $\# \notin \Sigma$, definimos su espejo como

$$\text{Esp}(L) = \{w\#w^R : w \in L\},$$

donde w^R es el reverso de w .

- a) Construya una GLC para $\text{Esp}(a^*b^*)$.
- b) Considere $K = \{a^n b^n : n \geq 0\}$. Describa $\text{Esp}(K)$ y demuestre que no es libre de contexto.
- c) Dado un AFD para un lenguaje regular R , construya un AP para $\text{Esp}(R)$.
- d) Considere

$$H = \{a^i b^j : i, j \geq 0, i \neq j\}.$$

Construya una GLC para H y demuestre via bombeo que $\text{Esp}(H)$ no es libre de contexto.

- e) Demuestre que

$$\text{Esp}(L) = \text{Esp}(\Sigma^*) \cap (L\{\#\}\Sigma^*).$$

¿Qué ilustra esta igualdad?

- 3. El *lema de Ogden*, en su versión para árboles, es una versión más fuerte del lema de bombeo para LLC.

Consideremos una $G = (V, \Sigma, R, S)$. Buscamos probar que existe un entero $p \geq 1$ tal que, en cualquier árbol de derivación T de un string $w \in \mathcal{L}(G)$ con al menos p posiciones “marcadas”, hay dos nodos etiquetados con una misma variable A , uno descendiente propio del otro, que determinan una descomposición $w = uvxyz$ con

$$S \xRightarrow{*} uAz, \quad A \xRightarrow{*} vAy, \quad A \xRightarrow{*} x.$$

El subárbol superior produce vxy y el inferior produce x ; vy contiene al menos una posición marcada y vxy contiene a lo más p posiciones marcadas.

Note que al repetir o suprimir el segmento del árbol entre ambos nodos se obtienen, para todo entero $t \geq 0$, árboles de la *misma gramática* para $uv^t xy^t z$, con un subárbol que produce $v^t xy^t$.

- a) En un árbol finito con hojas marcadas, llame *bifurcación marcada* a un nodo que tenga al menos dos hijos cuyos subárboles contengan hojas marcadas. Suponga que cada nodo tiene a lo más b hijos, donde $b \geq 2$, y que cada camino de la raíz a una hoja marcada pasa por a lo más h bifurcaciones marcadas, donde $h \geq 0$. Demuestre que hay a lo más b^h hojas marcadas.
- b) Demuestre la versión del lema de Ogden enunciada arriba.
- c) Deduzca el lema de bombeo usual para LLC marcando todas las posiciones del string.
- d) Un LLC es *inherentemente ambiguo* si toda GLC que lo genera es ambigua. Construya una GLC para

$$L_{\cup} = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0, i = j \text{ o } j = k\}.$$

- e) Fije ahora una GLC *arbitraria* G que genere $L_{\cup}$, una constante de Ogden $p \geq 3$ y $N = p + p!$. En un árbol para $a^p b^p c^N$, marque todas las posiciones ocupadas por a . Demuestre que las partes bombeadas deben ser $v = a^d$ y $y = b^d$ para algún $1 \leq d \leq p$.
- f) Repita el argumento con $a^N b^p c^p$, marcando todas las posiciones ocupadas por c . Obtenga un árbol T_{bc} de la misma palabra $a^N b^N c^N$ que contenga un subárbol que produzca alguna c , ninguna a y más de $p!$ letras b .

- g) Demuestre que los intervalos de posiciones terminales producidos por dos subárboles de un mismo árbol de derivación son disjuntos o uno está contenido en el otro. Use esta propiedad y la desigualdad $2p! > N$ para probar que $T_{ab} \neq T_{bc}$. Concluya que $L_{\cup}$ es inherentemente ambiguo.