

3.2. Variantes de máquinas de Turing

Definición. Sean M y N dos máquinas con alfabeto de entrada Σ . Diremos que M y N son *equivalentes* si $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$.

Definición. Diremos que dos modelos de computación son *equivalentes* si para cada máquina de uno existe una máquina equivalente en el otro y viceversa.

Definición. Una *MT con movimiento estacionario* es una MT cuya función de transición tiene la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}.$$

El movimiento S deja el cabezal en la misma celda. La cinta, el inicio y la computación se definen como antes.

Lema. Las MT y las MT con movimiento estacionario son equivalentes.

Definición. Sea $k \geq 1$ un entero. Una *MT de k cintas* es una MT con k cintas semiinfinitas, un cabezal por cinta y función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k.$$

Teorema. Para todo $k \geq 1$, las MT de k cintas y las MT son equivalentes.

Definición. Una *MT de cinta biinfinita* es una MT cuyas celdas se indexan por $\mathbb{Z}$, sin extremo izquierdo. Los movimientos L y R cambian el índice en -1 y $+1$.

Teorema. Las MT y las MT de cinta biinfinita son equivalentes.

Definición. Una *MT con acceso RAM* es una MT de dos cintas: datos y direcciones. La segunda sólo usa $0, 1, \sqcup$. Además de las transiciones usuales, hay *transiciones de salto*: el cabezal de datos va a la dirección indicada en binario y el control pasa a un estado fijo de Q .

Teorema. Las MT con acceso RAM y las MT son equivalentes, tanto para reconocer como para decidir.

Definición. Un *autómata determinista con cola* es como un AP, pero con una cola en lugar de una pila.

Teorema. Los autómatas deterministas con cola y las MT son equivalentes, tanto para reconocer como para decidir.

Ejercicios

1. Muestre que las siguientes modificaciones de la definición de MT no cambian su poder de cómputo.

- a) Para un entero fijo $b \geq 1$, la función de transición tiene la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{-b, -b+1, \dots, b\}.$$

Una transición escribe en la celda actual y, si el cabezal está en la celda $i \geq 0$ y el desplazamiento es j , lo lleva a la celda $\max\{0, i+j\}$. No lee ni modifica las celdas intermedias durante el salto.

- b) Para un entero fijo $d \geq 2$, las celdas se indexan por $\mathbb{Z}^d$. Cada paso lee y escribe en la celda actual y luego aumenta o disminuye en 1 una sola coordenada del cabezal. La entrada $w_1 \cdots w_n$ se ubica en $(0, 0, \dots, 0), \dots, (n-1, 0, \dots, 0)$; las demás celdas están en blanco y el cabezal parte en el origen
- c) La máquina tiene una cinta de entrada de sólo lectura y una cinta de trabajo, inicialmente en blanco. Ambas son semiinfinitas y sus cabezales parten en la primera celda. La entrada está seguida de blancos. En cada paso se leen ambos símbolos, se puede escribir en la cinta de trabajo y se mueven los cabezales independientemente.

2. Una *MT con reinicio* es como una MT estándar, salvo que la función de transición tiene la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, \text{RESET}\}.$$

Cada paso escribe en la celda actual y luego avanza una celda (R) o devuelve el cabezal a la celda 0 (RESET), sin leer ni modificar las celdas intermedias. El inicio, la aceptación y el rechazo son los usuales.

Pruebe la equivalencia con las MT estándares mediante los siguientes pasos.

- a) Muestre que una MT estándar puede simular una MT con reinicio.
- b) Sea A un alfabeto finito que contiene a $\sqcup$ y sea $\# \notin A$ un delimitador. Consideraremos el alfabeto de cinta

$$\Gamma' = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a \in A \cup \{\#\}, b \in \{0, 1\} \right\}.$$

Construya, en una MT con reinicio, una subrutina SHIFT que actúe de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdots \xrightarrow{\text{SHIFT}} \begin{bmatrix} \sqcup \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdots$$

- c) Muestre que una MT con reinicio puede simular una MT estándar usando la subrutina anterior.

Indicación: use la parte anterior guardando el cabezal y la información de la cinta adecuadamente.

3. Una *MT con memoria de escritura única* tiene dos cintas semiinfinitas: una de entrada de sólo lectura y una de trabajo, inicialmente en blanco.

La única diferencia con una MT estándar es que cada celda de la cinta de trabajo puede escribirse a lo más una vez. Es decir, una vez que se escribe un símbolo distinto de $\sqcup$ en una celda, no se puede volver a escribir en ella.

- a) Demuestre que una MT estándar puede simular cualquier máquina con memoria de escritura única.
- b) Demuestre la dirección recíproca.