

Lenguajes no regulares



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo / Plan

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Equivalencia ER - Automata
- $ER \rightarrow Automata?$
- $Automata \rightarrow ER?$
- **Lenguajes regulares:** AFD/AFND/ER + clausura.

- **Plan:**

- Lenguajes no regulares
- El lema de bombeo

Lenguajes no regulares

Lenguaje no regulares

- ¿Hay lenguajes **no** regulares?
- Para ver que un lenguaje es regular $\leftarrow$ construir AFD/AFND/ER
- Para ver que un lenguaje es no regular $\leftarrow$ argumento que no existe AFD
- AFD $\leftarrow$ computador “sin RAM”
 - Puede “recordar” en los estados
 - No puede recordar más que el número de estados
 - No puede “guardar” números arbitrariamente grandes.
- $L = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$
 - Lenguaje canónico no regular.
 - **Intuición:** el automata no puede recordar cuantos 0's vio.
- No basta con dicha intuición
 - $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ contiene tantos 1's como 0's}\}$
 - $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ contiene tantos 10's como 01's}\}$

Lema de bombeo

Lema de bombeo

- Problema: string demasiado largo que requiera recordar mucho.

Def.

Sea L un lenguaje regular.

Existe $p(L) \in \mathbb{N}$ llamado *largo de bombeo* tal que todo $w \in L$ de largo $|w| \geq p$ se puede descomponer como $w = xyz$ con $x, y, z \in \Sigma^*$ tal que

- $|xy| \leq p$,
- $y \neq \varepsilon$,
- $xy^iz \in L$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

- **Dem:**

- ¿Cómo aplicarlo?

Aplicando el lema de bombeo

Def.

Sea L un lenguaje regular.

Existe $p(L) \in \mathbb{N}$ llamado *largo de bombeo* tal que todo $w \in L$ de largo $|w| \geq p$ se puede descomponer como $w = xyz$ con $x, y, z \in \Sigma^*$ tal que

- $|xy| \leq p$,
- $y \neq \varepsilon$,
- $xy^iz \in L$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

- Típica demostración es por contradicción.
- Supongo que L es regular en busca de contr. $\rightarrow$ uso el lema de Bombeo.
- Enunciado de la forma $\exists p \forall w \in L \exists x, y, z \in \Sigma^* \forall i \in \mathbb{N}$.
 - **Adversario:** elije un $p \in \mathbb{N}$.
 - **Yo:** elijo un string $w \in L$ tal que $|w| \geq p$
 - **Adversario:** elije una descomposición $xyz = w$.
 - **Yo:** elijo $i \in \mathbb{N}$ tal que $xy^iz \notin L$ lo que es una contradicción.

Aplicando el lema de bombeo

Def.

Sea L un lenguaje regular.

Existe $p(L) \in \mathbb{N}$ llamado *largo de bombeo* tal que todo $w \in L$ de largo $|w| \geq p$ se puede descomponer como $w = xyz$ con $x, y, z \in \Sigma^*$ tal que

- $|xy| \leq p$,
- $y \neq \varepsilon$,
- $xy^iz \in L$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

- **Adversario:** elije un $p \in \mathbb{N}$.
- **Yo:** elijo un string $w \in L$ que (prob.) depende de p
- **Adversario:** elije una descomposición $xyz = w$.
- **Yo:** elijo $i \in \mathbb{N}$ tal que $xy^iz \notin L$ lo que es una contradicción.

• Ej:

- $L_1 = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{ww : w \in \{0, 1\}^*\}$
- $L_3 = \{0^i 1^j : i > j\}$

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** usar cerradura para concluir no regularidad.
- Por contradicción:
 - Asumo L regular
 - Usando propiedades de cerradura concluyo que L' es regular.
 - Pero yo sabía (via bombeo/otra forma) que L' es regular $\rightarrow \leftarrow$.
- **Ej:**
 - $L_1 = \{w \in \Sigma^* : w \text{ tiene igual cantidad de 0's que 1's}\}$
 - $L_2 = \{0^i 1^j : i \neq j \in \mathbb{N}\}$
 - $L_3 = \{0^i 1^j : i \leq j\}$

¿Caracterización de lenguajes regulares?

- ¿Puede **bombeo** probar que todo lenguaje no regular es no regular?
- $L = \{a^i b^j c^k : i = 0 \text{ o } j = k\}$
 - Satisface bombeo...
 - ¡No es regular!
- Un lenguaje que satisface el lema de bombeo
 - puede o no puede ser regular.
- Hay caracterizaciones de los lenguajes regulares.
 - Myhill-Nerode
 - **bloque-bombeable**

Más ejemplos del lema de bombeo

- **Ej:** Los siguientes son no regulares
 - $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ es palíndromo}\}$
 - $L_2 = \{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

Dudas/Preguntas

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Lenguajes no regulares
- El lema de bombeo

- **Prox. clase:**

- Gramáticas libres de contexto