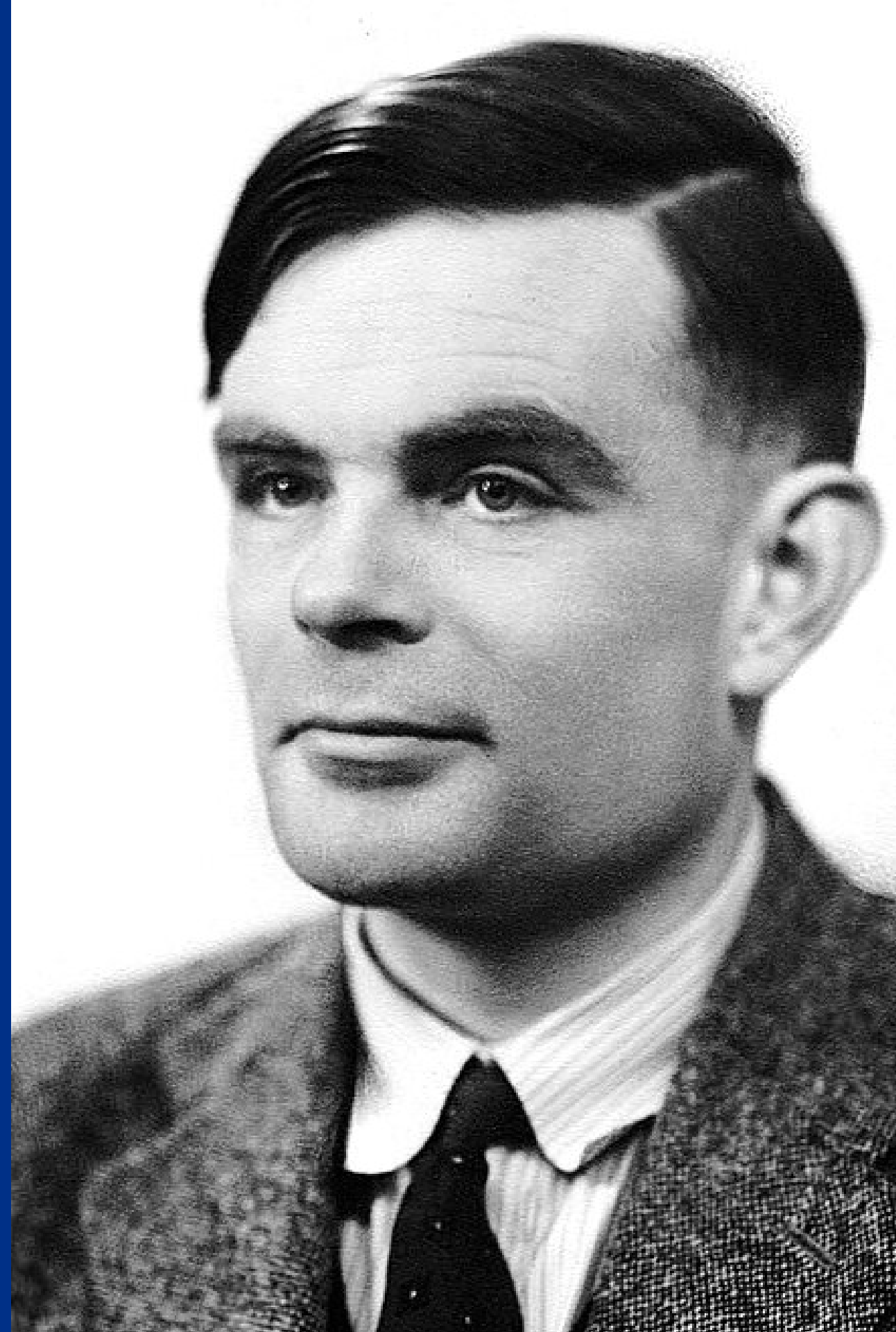


Máquinas de Turing



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo / Plan

Recuerdo/plan

- **Recuerdo:**

- Lenguajes no libres de contexto.
- Lema de Bombeo

- **Plan:**

- Máquinas de Turing

Máquinas de Turing

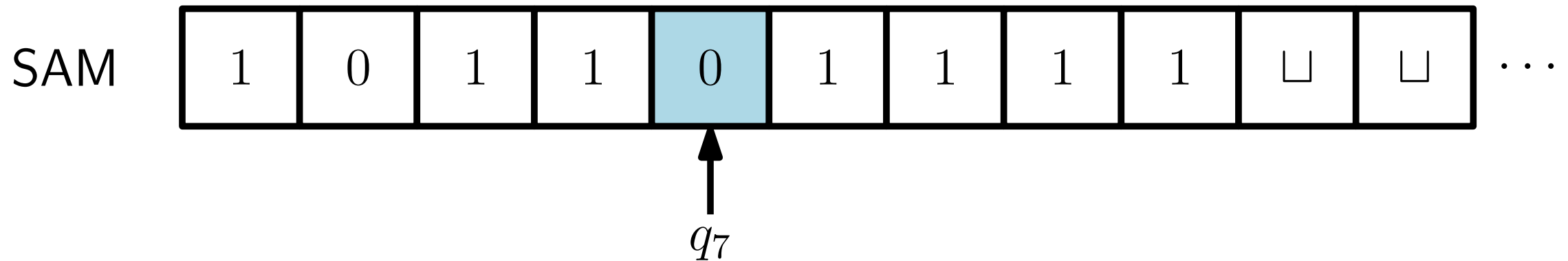
Objetivo del curso

- **Objetivo del curso:** formalizar el modelo de computación.
- Entendimos el poder y los límites de AFD y AP/GLC.
- **Ej:**
 - $\{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{w \# w : w \in \{0, 1\}^*\}$.
 - ¿Qué falla?
- AFD: tokenización/procesos. AP/GLC: sintaxis y estructura recursiva.
 - Útiles, demasiado restringidos como modelo general.
- **Plan:** extender a un modelo de computación general.

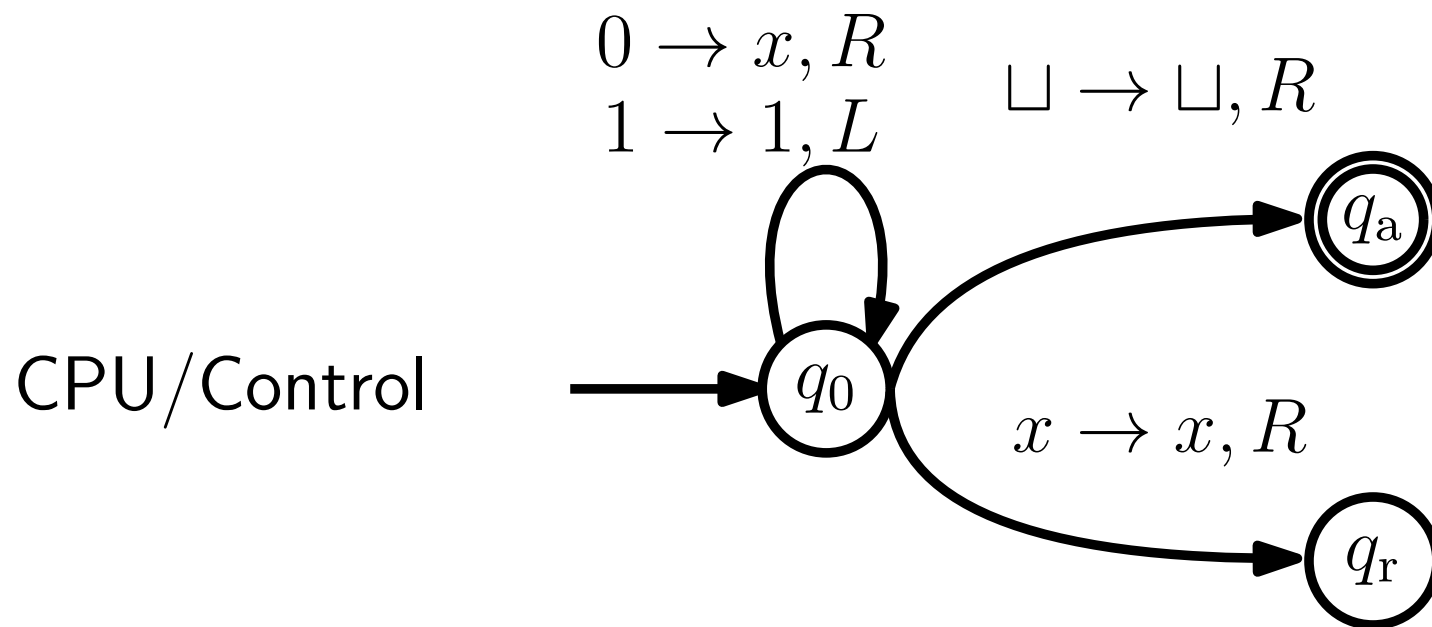
En busca de un modelo

- ¿Cómo extendemos nuestro modelo?
 - Agregar una segunda pila.
 - Usar una cola (u otra estructura de datos)
 - Dar acceso a memoria.
- Exploraremos la tercera idea
- La pregunta es anterior a los computadores.
- ¿Qué significa ejecutar un procedimiento mecánico?
- En los años 1930 se busca precisar la noción de *computar mecánicamente*.
 - Turing: una persona que calcula paso a paso, con papel y símbolos.
 - Church: cálculo lambda.
 - Control finito + cinta = CPU + memoria
- Buscamos algo “con el mismo poder” que un lenguaje de programación moderno.

El acceso a memoria



- **Ej:** M_0 , con entrada en $\{0, 1\}^*$.



- $a \rightarrow b, D$: leer a , escribir b y mover el cabezal según D .
 - L : izquierda; R : derecha. $a \rightarrow D$ conserva el símbolo.
- En q_a devuelve True; en q_r False.
- Díficil de asimilar.

Describir una máquina

- Diagramas de estado $\leftarrow$ complejos.
 - Usualmente describiremos la máquina en español o pseudocódigo.
- **Ej:** M_0 . Repetir según el símbolo que lee:
 - Si es 0, escribir x y mover a la derecha.
 - Si es 1, conservarlo y mover a la izquierda.
 - Si es x , rechazar.
 - Si es blanco, aceptar.
- La descripción debe poder traducirse a estados y transiciones.

Máquinas de Turing

Def.

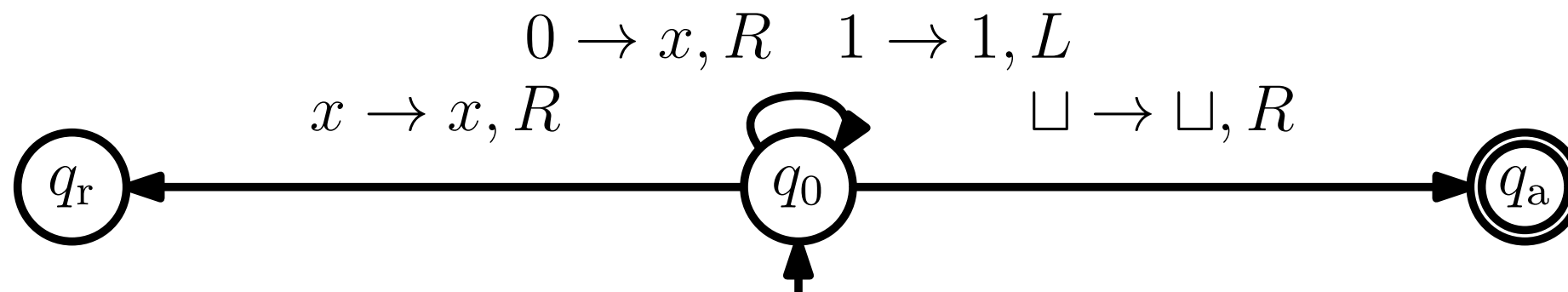
Una *máquina de Turing* es una 7-tupla,

$$(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r),$$

donde Q, Σ, Γ son conjuntos finitos y

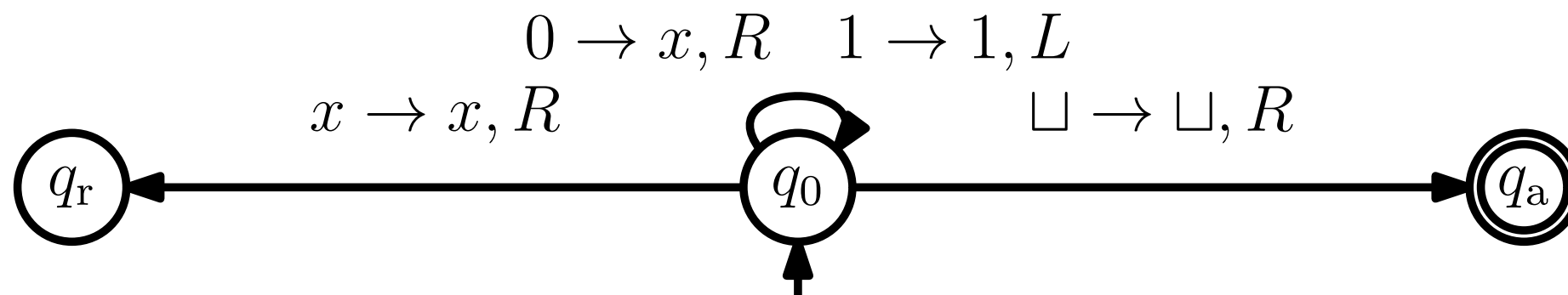
1. Q es el conjunto de estados,
2. Σ es el alfabeto de entrada, que no contiene el símbolo blanco $\sqcup$,
3. Γ es el alfabeto de cinta, donde $\sqcup \in \Gamma$ y $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ es la función de transición,
5. $q_0 \in Q$ es el estado inicial,
6. $q_a \in Q$ es el estado de aceptación, y
7. $q_r \in Q$ es el estado de rechazo, donde $q_r \neq q_a$.

- Ej: M_0 .



La cinta y el cabezal

- La cinta tiene una primera celda y es infinita hacia la derecha.
- Al inicio, el input $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ ocupa las primeras n celdas.
 - Las demás contienen $\sqcup$; el cabezal parte en la primera celda.
 - El estado inicial es q_0 .
- Intentar ir “más a la izquierda” deja el cabezal en la primera celda.
 - En q_a o q_r la máquina se detiene.
- **Ej:** M_0 con entrada 001. ¿Con ε ?



Configuraciones

- **Configuración:** describe el status de la computación.
- **AFD:** estado
- **AP:** estado + pila
- **MT:** estado + cabezal + cinta.

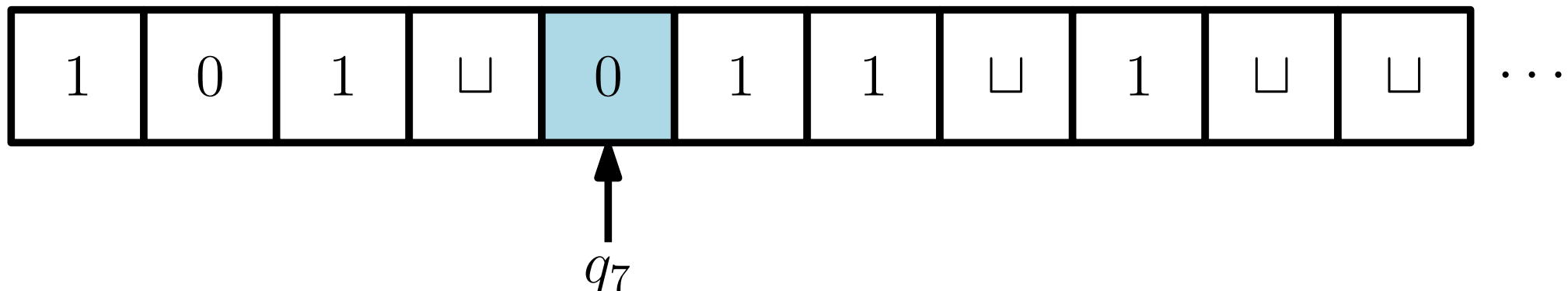
Def.

Sea M una MT.

Una *configuración* es un string $\alpha q \beta \in \Gamma^* Q \Gamma^*$ dónde α son los contenidos de la cinta a la izquierda del cabezal, q es el estado actual de la máquina, y β es el resto de la cinta.

- **Obs:** no anotamos los infinitos $\sqcup$ del final.

- **Ej:**



Un paso de computación

- ¿Cómo computa una MT?

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ una MT.

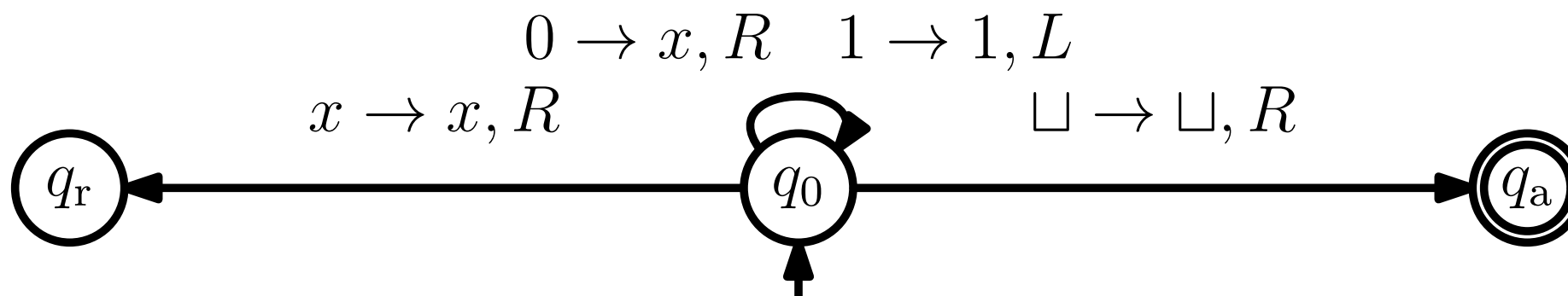
Sea $u, v \in \Gamma^*$, $a, b \in \Gamma$, $q \in Q \setminus \{q_a, q_r\}$ y $r \in Q$.

Diremos que M *computa en un paso* desde uaq a bv :

- La configuración $uacrv$ si $\delta(q, b) = (r, c, R)$.
- La configuración $uracv$ si $\delta(q, b) = (r, c, L)$.

Si M computa desde la config. C a la config. D en un paso, lo denotaremos por $C \vdash_M D$

- **Ej:** en M_0 , qué ocurre con xq_001 y xq_01 .



Extremo izquierdo de la cinta

- Caso borde: extremo izquierdo de la cinta.

Def.

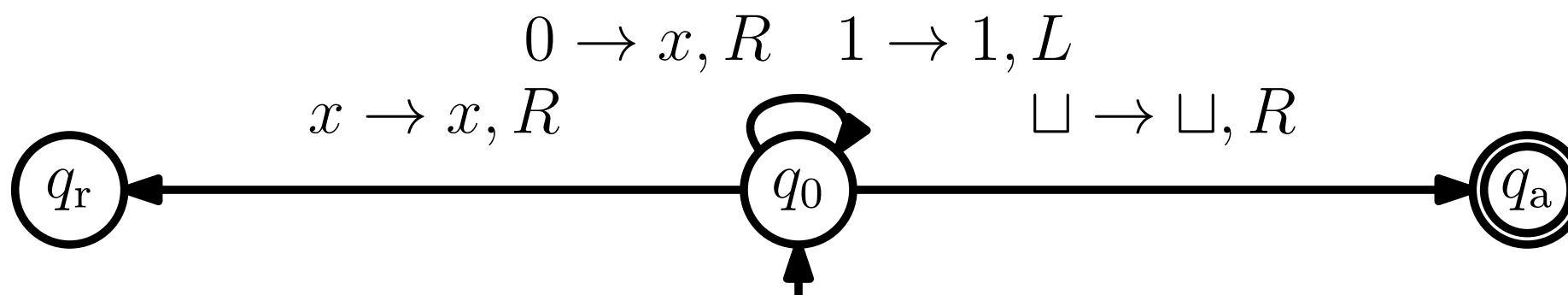
Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ una MT.

Sea $v \in \Gamma^*$, $b \in \Gamma$, $q \in Q \setminus \{q_a, q_r\}$ y $r \in Q$.

Diremos que M *computa en un paso* desde q bv:

- La configuración $c r v$ si $\delta(q, b) = (r, c, R)$.
- La configuración $r cv$ si $\delta(q, b) = (r, c, L)$.

- **Ej:** en M_0 , ¿ q_0 1? ¿ q_0 ?



Una computación

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ una MT y C, D dos configuraciones.

Diremos que M *computa* D desde C si $C \vdash_M^* D$.

Es decir, existen $k \in \mathbb{N}$ configuraciones $C_1, \dots, C_k$ tal que

$$C = C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M \dots \vdash_M C_k = D.$$

- ¿Config. inicial? ¿Aceptación? ¿Rechazo?

Def.

Si una configuración está en estado q_a será *de aceptación*, si está en estado q_r será *de rechazo*.

- Una MT M *acepta* $w \in \Sigma^*$ si $q_0 w \vdash_M^* C$ con C de aceptación.
- Una MT M *rechaza* $w \in \Sigma^*$ si $q_0 w \vdash_M^* C$ con C de rechazo.

Si M acepta o rechaza w diremos que se *detiene* en w .

- **Notación:** $M(w) = 1$ para aceptación, $M(w) = 0$ para rechazo.

Aceptar una entrada

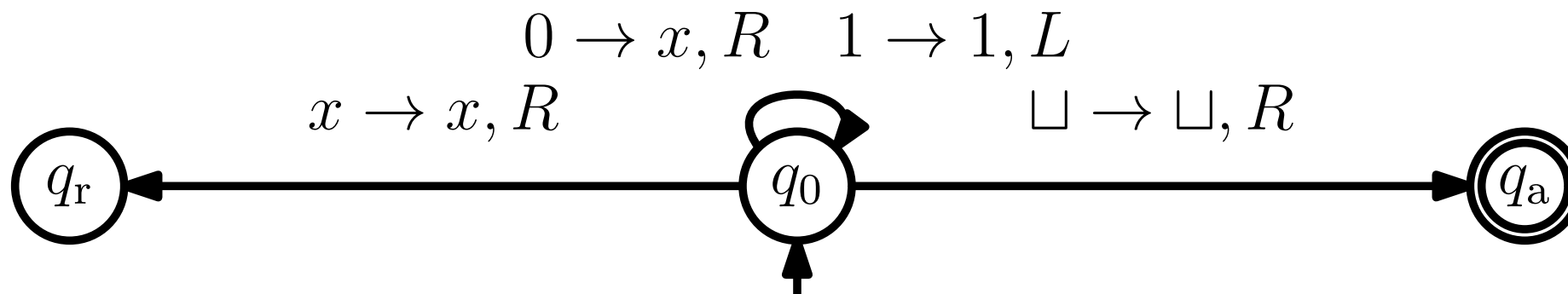
Def.

El *lenguaje reconocido* por una MT M es

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* : M(w) = 1\}.$$

Un lenguaje es *Turing-reconocible* si alguna máquina de Turing lo reconoce.

- También se usa el nombre *recursivamente enumerable*.
- **Ej:** M_0 con ε , 00, 01 y 1. ¿Qué entradas acepta?



- Strings aceptados/rechazados ¿Única opción?

Decidir un lenguaje

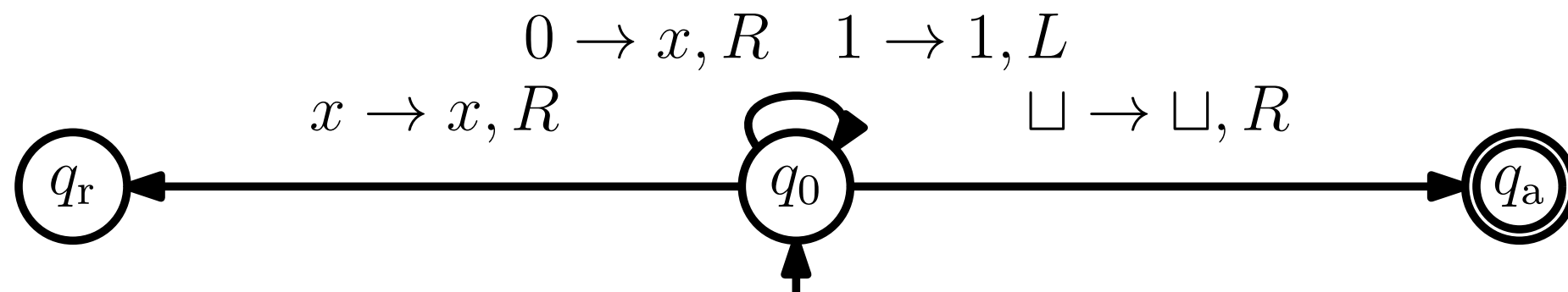
Def.

Un *decisor/decididor* es una MT que se detiene en toda entrada de Σ^* .

Si además reconoce L , decimos que *decide* L .

Un lenguaje es *Turing-decidible*, o *decidable*, si alguna MT lo decide.

- También se usa el nombre *recursivo*.
- **Ej:** M_0 . ¿Es un decididor?

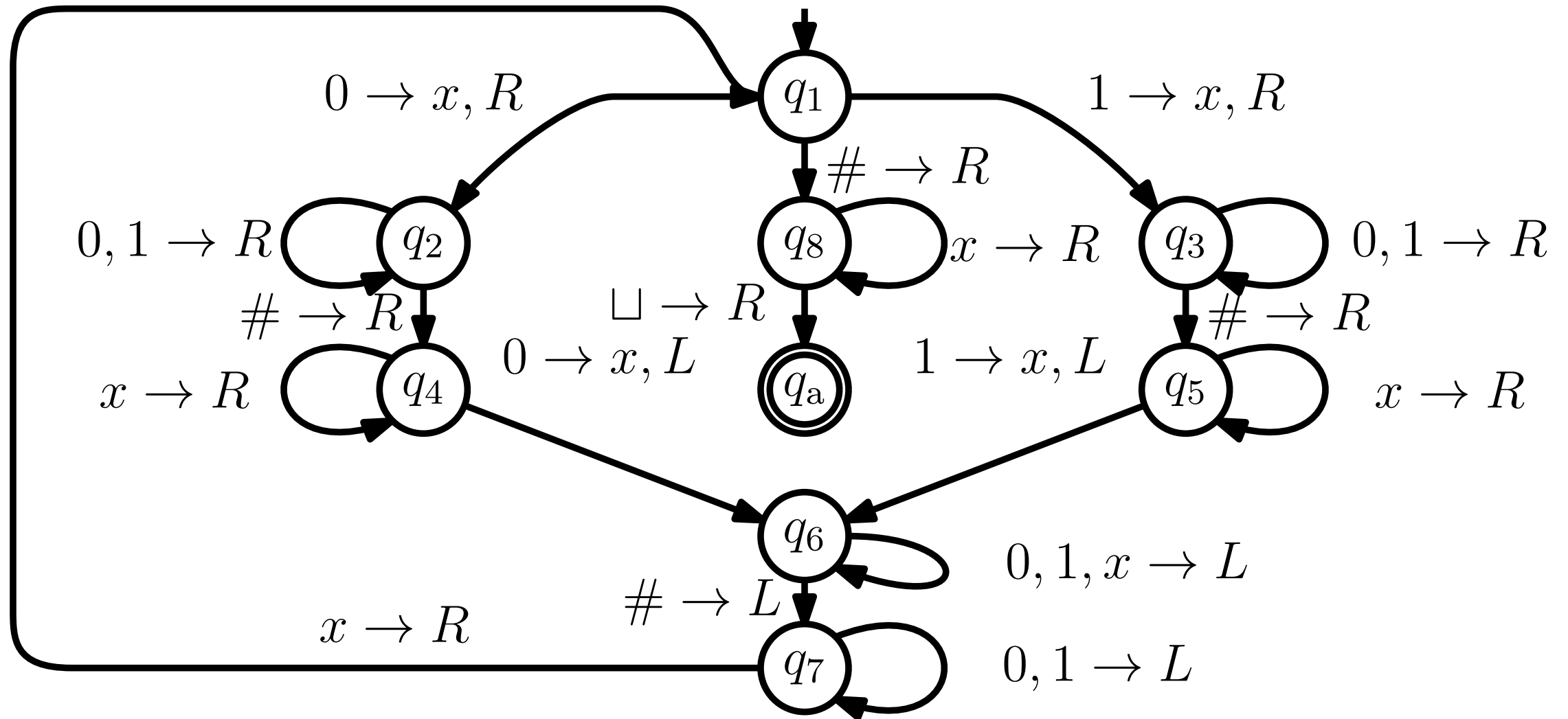


- Todo lenguaje decidable es Turing-reconocible.
 - Más adelante veremos que la recíproca no vale.

Una máquina en palabras

- **Ej:** M_1 , con entrada $w \in \{0, 1, \#\}^*$.
- Si no aparece $\#$, rechazar.
- Mientras queden símbolos sin tachar antes del primer $\#$:
 - Comparar el primero con el siguiente sin tachar de la derecha.
 - Si difieren o falta su par, rechazar; si no, tachar ambos.
 - Regresar a la izquierda y continuar.
- Al terminar: si quedan símbolos a la derecha, rechazar; si no, aceptar.
- ¿Qué lenguaje reconoce M_1 ? ¿Siempre termina?
- **Ej:** ¿Cómo procesa estas entradas?
 - 011000#011000, 01#01, 01#10, #, ε .

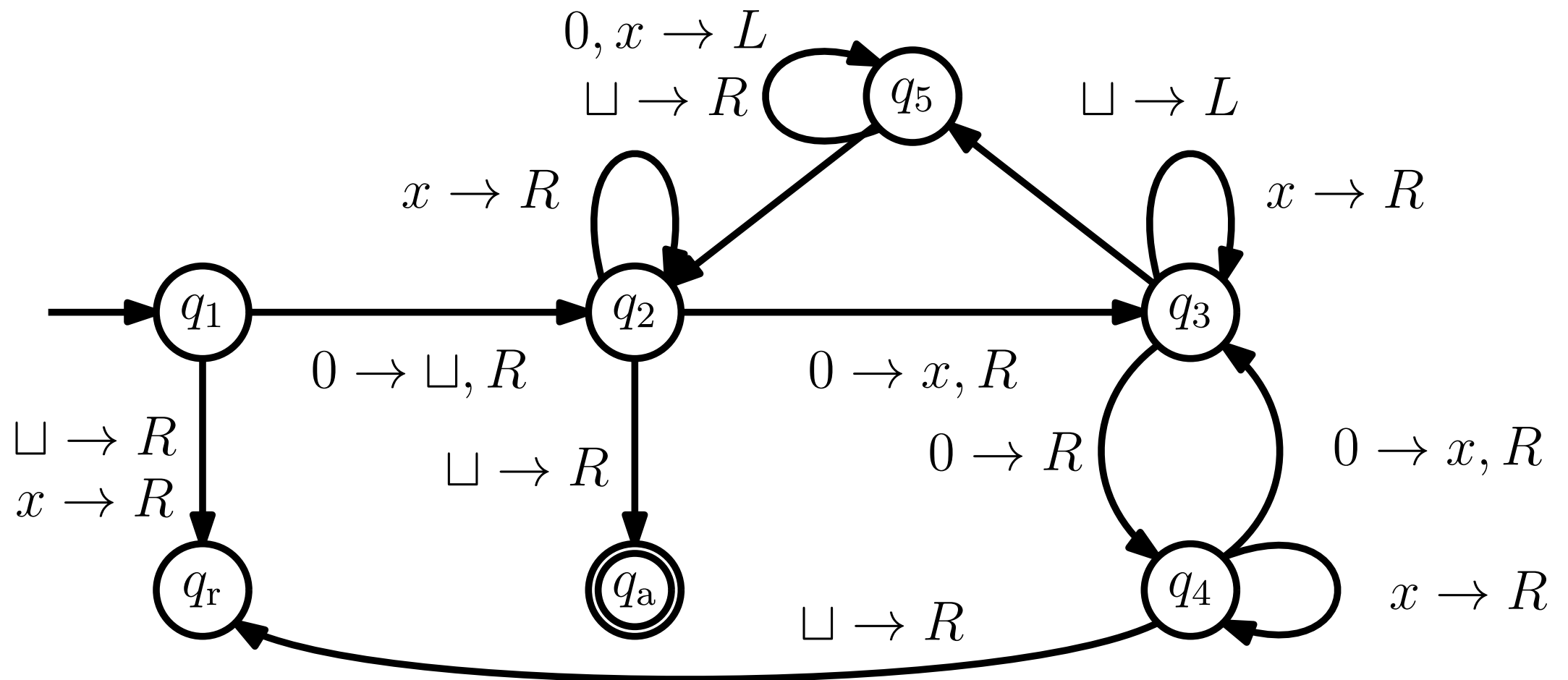
Diagrama de estados



Otra máquina en palabras

- **Ej:** M_2 . Primero, entradas no vacías en $\{0\}^*$.
- Repetir el siguiente recorrido:
 - Ir a la derecha tachando alternadamente los 0 aún sin tachar.
 - Si al empezar había sólo uno, aceptar.
 - Si había más de uno y la cantidad era impar, rechazar.
 - En otro caso, volver al extremo izquierdo y repetir.
- ¿Qué lenguaje reconoce? ¿Qué cambia en cada recorrido?
- **Ej:** simular los recorridos sobre la entrada 0000.
 - Comparar con 0, 000 y 00000000. ¿Siempre termina?
- ¿Cómo completaríamos la descripción para la entrada ε ?

Diagrama de estados



Tercer lenguaje

- **Ej:** M_3 , con entrada $w \in \{0, 1, \#\}^*$.
- Marcar el primer símbolo: si era blanco, aceptar; si no era $\#$, rechazar.
- Buscar y marcar el siguiente $\#$; si antes hay blanco, aceptar.
- Repetir:
 - Comparar los strings después de los dos $\#$ marcados.
 - Si son iguales, rechazar; si no, avanzar la marca derecha al próximo $\#$.
 - Si ya no hay otro $\#$, avanzar la izquierda al siguiente $\#$
 - y poner la derecha en el posterior; si no existe, aceptar.
- Marcas son partes del alfabeto: $\#$ y $\dot{\#}$ son símbolos distintos.
- **Standard:** Marcar caracteres.

Diseñar máquinas de Turing

- **Ej:** diseñar un decisor para cada lenguaje.
 - $\{0^n 1^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.
 - $\{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.
 - $\{0^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

Dudas

Recuerdo/plan

- **Hoy:**

- Máquinas de Turing

- **Próxima clase:**

- Variantes